b- Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,1]$ et montrer que :

pour tout $x \in]0,1[$ on a $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\varphi(x)$.

c- Donner le tableau de variation de f et construire la courbe (C) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

II- On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de l'aire de la partie E du plan délimitée par la courbe (C) et l'axe $(x'x)$.
Pour cela on est conduit à chercher une valeur approchée de l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)dx$.

1) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction g_n définie sur IR^+ par:

$$\begin{cases} g_n(t) = -t^n \text{Log}t & \text{si } t > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

a- Prouver que, pour tout $n \geq 1$, g_n est integrable sur $[0,1]$.
On définiealors la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ par $u_n = \int_0^1 g_n(t)dt$.

b- Soit G_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} G_n(t) = -\dfrac{t^{n+1}\text{Log}t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} & \text{si } t \in]0,1] \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur $[0,1]$; en déduire u_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) Soit $n \in IN$ et t un réel quelconque .

a- Montrer que pour tout réel t , on a :

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 + \ldots + (-1)^n t^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+3}}{1+t^2}.$$

b- Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$f(t)=g_1(t) - g_3(t) + g_5(t) + \ldots + (-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} g_{2n+3}(t)$$

(f désigne la fonction définie dans la partie **I-**).

c- En déduire que $I=u_1-u_3+u_5+\ldots+(-1)^n u_{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1 \dfrac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$

3) On pose $S_n = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1}$ pour $n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN$ on a $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

b- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$.

c- Déterminer un entier n_0 tel que $|I - S_n| \leq 10^{-2}$.
En déduire une valeur approchée, à 10^{-2}prés , de I et une valeur valeur approchée, à 10^{-2}prés de l'aire de la partie E.